5. UČENIK UME DA IZRAČUNAVA POVRŠINU I ZAPREMINU VALJKA, KUPE I LOPTE KADA SU NEOPHODNI ELEMENTI NEPOSREDNO DATI U ZADATKU

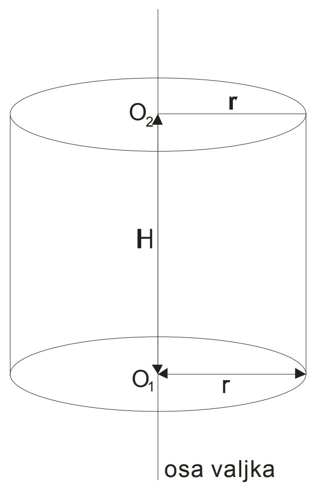
VALJAK

Valjak je geometrijsko telo ograničeno sa dva kruga u paralelnim ravnima i delom cilindrične površi čije su izvodnice normalne na ravan tih krugova.

Osa valjka je prava koja prolazi kroz centre baza.

Naravno kao i do sada oznake su:

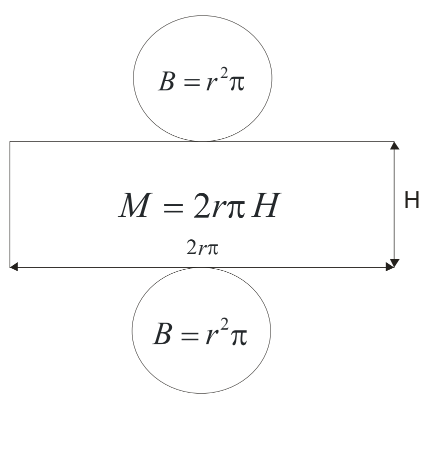
- **P je površina valjka**
- **V je zapremina valjka**
- **B je površina baze**
- **M je površina omotača**
- **H je visina valjka**
- **r je poluprečnik osnove (baze), onda je 2r prečnik**



Početne formule za površinu i zapreminu valjka iste su kao i formule za P i V prizme:

$$P = 2B + M \qquad \text{i} \qquad V = B \cdot H$$

Pre nego li sklopimo formule za P i V pogledajmo mrežu valjka:



Baze su očigledno krugovi čija je površina :

$$B = r^2\pi\ .$$

Omotač je pravougaonik čije su stranice visina H i obim kruga $O = 2r\pi$ **, pa je površina omotača jednaka**

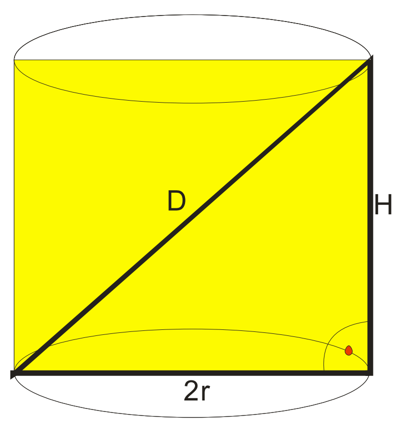
$$M = 2r\pi H$$

$$P = 2B + M \qquad\qquad V = B \cdot H$$

$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H \qquad\qquad V = r^2\pi H$$

$$P = 2r\pi(r + H)$$

Pogledajmo sada kako izgleda osni presek valjka:



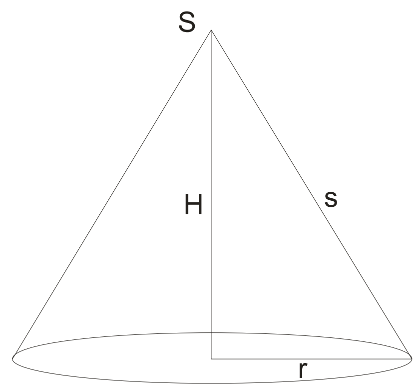
osni presek

Ovde primenjujemo Pitagorinu teoremu: $D^2 = (2r)^2 + H^2$

Površina osnog preseka je $P_{op} = 2rH$

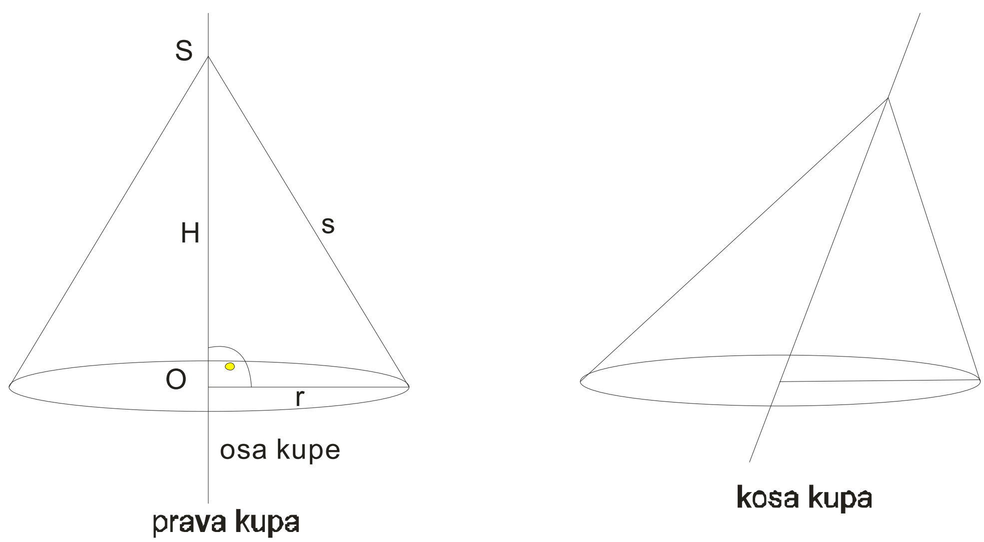
KUPA

Kupa je oblo feometrijsko telo čija je osnova krug, a omotač je deo obrtne konusne površi sa vrhom u tački S.



Osa kupe je prava koja prolazi kroz vrh kupe i centar osnove kupe . Ako je osa normalna na osnovu kupe reč je o

pravoj kupi, inače se radi o kosoj kupi.



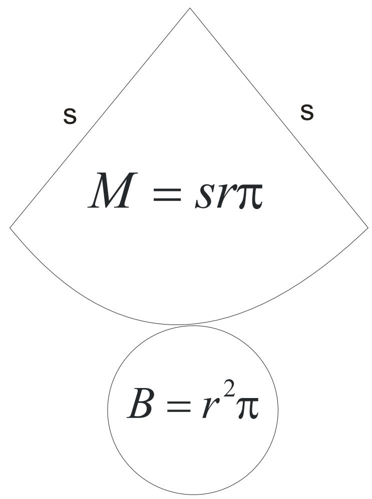
Obeležavanje:

- **r** je poluprečnik osnove(2r je prečnik osnove)
- **H** je visina kupe
- **s** je izvodnica kupe
- **B** je baza (osnova)
- **M** je omotač
- **P** površina, **V** zapremina

Opšte početne formule za površinu i zapreminu kupe iste su kao i formule za P i V piramide.

$$P = B + M \qquad \text{i} \qquad V = \frac{1}{3} B \cdot H$$

Pogledajmo najpre **mrežu** kupe.

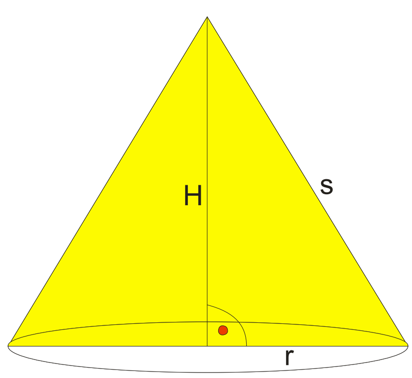


$$P = B + M \qquad\qquad V = \frac{1}{3} BH$$

$$P = r^2\pi + sr\pi \qquad\qquad V = \frac{1}{3} r^2\pi H$$

$$P = r\pi(r + s)$$

Pogledajmo i osni presek:



osni presek

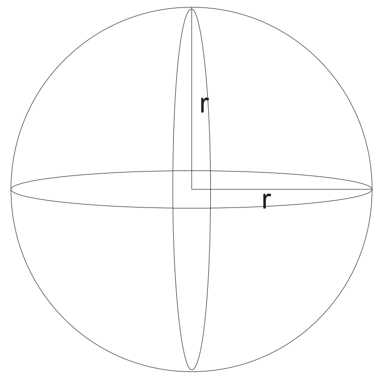
Osni presek je trougao , čija je površina: $P_{op} = \frac{2r \cdot H}{2}$ to jest $P_{op} = r \cdot H$

SFERA (LOPTA)

Sfera je skup svih tačaka prostora podjednako udaljenih od jedne fiksirane tačke(centra sfere).

Poluprečnik sfere(r) je rastojanje bilo koje tačke sfere od centra sfere.

Lopta je oblo telo ograničeno sferom.



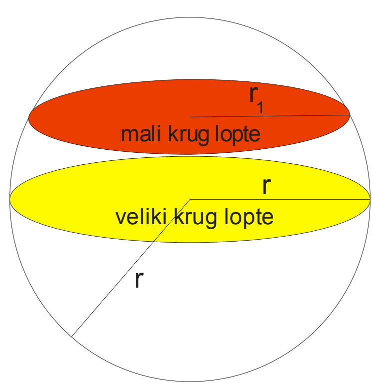
$P = 4r^2\pi$ je formula za površinu lopte

$V=\frac{4}{3}r^3\pi$ je formula za zapreminu lopte

Lopta nastaje obrtanjem kruga oko bilo kog njegovog prečnika.

Presek lopte i bilo koje ravni je krug. Ako presečna ravan prolazi kroz centar dobija se **veliki krug** lopte, to jest

krug koji ima najveću površinu.



Primer 1.

Prečnik osnove valjka je 14cm, a visina valjka je 9cm. Izračunaj površinu valjka.

Rešenje:

$$2r = 14cm$$
$$H = 9cm$$
$$P = ?$$

Formula za površinu je:

$$P = 2B + M$$
$$P = 2r^2\pi + 2r\pi H$$ Iz 2r = 14 je r = 7cm
$$P = 2r\pi(r + H)$$
$$P = 2 \cdot 7\pi(7 + 9)$$
$$P = 14\pi \cdot 16$$
$$P = 224\pi cm^2$$

Primer 2.

Površina valjka je $48\pi cm^2$ a površina njegovog omotača $30\pi cm^2$. Izračunaj visinu i zapreminu valjka.

Rešenje:

$$P = 48\pi cm^2$$
$$\underline{M = 30\pi cm^2}$$
$$H = ?$$
$$V = ?$$

Krenućemo od formule za površinu, ali one početne, uopštene i naći ćemo bazu!

$$P = 2B + M$$
$$48\pi = 2B + 30\pi$$
$$2B = 48\pi - 30\pi$$
$$2B = 18\pi$$
$$B = \frac{18\pi}{2}$$
$$B = 9\pi cm^2$$

Sada ćemo iz baze naći poluprečnik r.

$$B = r^2\pi$$
$9\pi = r^2\pi$ ovde pokratimo π
$$r^2 = 9$$
$$r = \pm\sqrt{9}$$
$r = \pm 3$ ali kako dužina ne može biti negativan broj
$$r = 3cm$$

Dalje upotrebimo formulu za površinu omotača, da nađemo visinu H:

$M = 2r\pi H$

$30\pi = 2 \cdot 3\pi H$ opet skratimo π

30=6H

$H = \frac{30}{6}$

$H = 5cm$

I na kraju, zapremina je:

$V = B \cdot H$

$V = 9\pi \cdot 5$

$V = 45\pi cm^3$

Primer 3.

Poluprečnik osnove kupe je 6 cm, a visina kupe je 11 cm. Izračunaj zapreminu te kupe.

Rešenje:

$r = 6cm$

$H = 11cm.$

$V = ?$

$V = \frac{1}{3} B \cdot H$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot H$

$V = \frac{1}{3} 6^2 \pi \cdot 11$

$V = \frac{1}{3} 36\pi \cdot 11$ skratimo 36 i 3 sa 3

$V = 12\pi \cdot 11$

$V = 132\pi cm^3$

Primer 4.

Izračunati površinu prave kupe čija je zapremina $3\pi cm^3$ a površina njene osnove $3\pi cm^2$.

Rešenje:

$V = 3\pi cm^3$

$B = 3\pi cm^2$

$P = ?$

Najpre tražimo visinu H primenjujući početnu formulu za zapreminu:

$V = \frac{1}{3} BH$

$3\pi = \frac{1}{3} 3\pi \cdot H$ ovde skratimo trojke i π

$3 = H$

$H = 3cm$

Iz površine baze ćemo lako naći poluprečnik

B= $r^2\pi$

$3\pi = r^2\pi$

$r^2 = 3$

$r = \sqrt{3} cm$

Primenom Pitagorine teoreme ćemo naći izvodnicu s:

$s^2 = H^2 + r^2$

$s^2 = 3^2 + \sqrt{3}^2$

$s^2 = 9 + 3$

$s^2 = 12$

$s = \sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = 2\sqrt{3} cm$

I konačno, površina je:

$P = r\pi(r + s)$

$P = \sqrt{3}\pi(\sqrt{3} + 2\sqrt{3})$

$P = \sqrt{3}\pi \cdot 3\sqrt{3}$

$P = 3\pi\sqrt{3}^2$

$P = 3\pi \cdot 3$

$P = 9\pi cm^2$

Primer 5.

Obim osnove kupe je $6\pi cm$, a visina kupe je 4 cm. Izračunati izvodnicu, površinu i zapreminu.

Rešenje:

$O = 6\pi cm$

$\underline{H = 4cm}$

$s = ?$

$P = ?$

$V = ?$

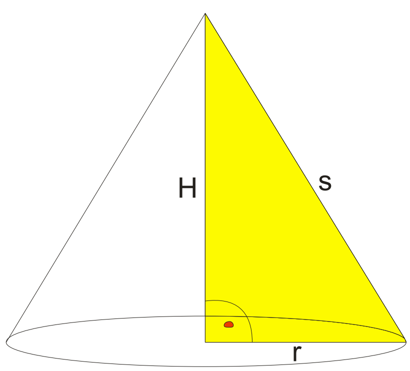
Iz obima osnove ćemo naći poluprečnik osnove r

$O = 2r\pi$

$6\pi = 2r\pi$

$2r = 6$

$r = 3cm$



Primenom Pitagorine teoreme dobijamo izvodnicu:

$s^2 = r^2 + H^2$

$s^2 = 3^2 + 4^2$

$s^2 = 9 + 16$

$s^2 = 25$

$s = \sqrt{25}$

$s = 5cm$

Dalje nije teško naći površinu i zapreminu:

$P = r\pi(r + s)$

$P = 3\pi(3 + 5)$

$P = 3\pi \cdot 8$

$P = 24\pi cm^2$

$V = \frac{1}{3} r^2 \pi H$

$V = \frac{1}{3} 3^2 \pi \cdot 4$

$V = \frac{1}{3} 9\pi \cdot 4$

$V = 12\pi cm^3$

Primer 6.

Poluprečnik lopte je 3 cm. Izračunati površinu i zapreminu lopte.

Rešenje:

$r = 3cm$

$P = ?$

$V = ?$

$P = 4r^2\pi$

$P = 4 \cdot 3^2\pi$

$P = 4 \cdot 9\pi$

$P = 36\pi cm^2$

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$

$V = \frac{4}{3}3^3\pi$

$V = \frac{4}{3} \cdot 27\pi$

$V = 4 \cdot 9\pi$

$V = 36\pi cm^3$

Primer 7.

Zapremina lopte je $\frac{4}{3}\pi cm^3$. Odrediti površinu te lopte.

Rešenje:

$V = \frac{4}{3}\pi cm^3$

$P = ?$

Najpre ćemo iz zapremine naći poluprečnik lopte :

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$

$\frac{4}{3}\pi = \frac{4}{3}r^3\pi$ skratimo $\frac{4}{3}$ i π i dobijamo:

$r^3 = 1$

$r = 1cm$

Dalje nije teško naći površinu:

$P = 4r^2\pi$

$P = 4 \cdot 1^2\pi$

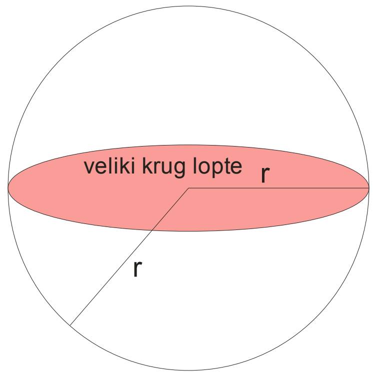
$P = 4\pi cm^2$

Primer 8.

Obim velikog kruga lopte je $36\pi cm$. Izračunati zapreminu lopte.

Rešenje:

$O_{vk} = 36\pi cm$
$V = ?$



Veliki krug lopte ima isti poluprečnik kao i cela lopta!

$O_{vk} = 2r\pi$
$36\pi = 2r\pi$
$36 = 2r$
$r = 18cm$

$V = \frac{4}{3}r^3\pi$
$V = \frac{4}{3}18^3\pi$
$V = \frac{4}{3}\cdot 5832\pi$
$V = 4\cdot 1944\pi$
$V = 7776\pi cm^3$

www.matematiranje.in.rs